中世城郭研究会 月例会 2006-08-20（改訂: 2006-08-26）

土塁の体積と土橋の体積

西村　和夫
nishimura@komazawa-u.ac.jp

1. はじめに

城跡を観察すると，堀を掘った土で土塁を形成したと考えられる場所が多くある．逆に，後世のいつかに，元々はあった土塁を崩し，堀を埋め立てたと考えられる場所がある．

同様に，土塁を崩して土橋を形成したと考えられる地形に遭遇することがある．このとき，直観的にほぼ確信をもって“土塁を崩して土橋を形成した”という仮説を採用したくなる場合と，判断をためらう場合とがある．

崩されたと考えられる土塁の体積と，形成されたと考えられる土橋の体積を計算して比較すれば，次の二つの目的に使えると考えた．

1: ほぼ明らかに仮説が成り立ちそうな場合，少なくとも体積について否定的な材料がないことを示す．

2: 仮説を採用するかどうかをためらう場合，その判断材料の一つとなる．

ただし，どちらの場合も，外部との土の出入りがないことを仮定している．

また，体積の計算方法を確立しておけば，遺跡調査のさまざまな場面で役に立つことがあるかもしれない．ここでは，土塁，土橋，堀などの体積計算に有用と思われる新作の公式を示しておく．具体的には，付録（5. 公式集）に，四角錐台と四面体の体積公式と，台形の等積中心線の位置の公式を載せておいた．

体積は，測定値から数値積分によって計算することになる．測量学の教科書に当たってみると，ほとんどの本で，簡便ではあるが精度の低い方法しか紹介されていなかった．その方法を 3.3 に示す．3.2 で示す“シンプソン公式”という精度の高い数値計算の手法を紹介している本（[1] など）もいくつかあったが，残念ながら面積計算への適用しか示していず，体積計算への応用は考慮していない．管見ではただ一つ，小田部和司『測量学（第２版）』[2] が体積計算への応用に及んでいる．

4. では，実測値から計算した例を示す．例として，小幡城（茨城町）と小机城（横浜市）を用いた．

仮説 A: 小幡城では，本丸虎口西脇の土塁を破壊し，その前面の堀を埋め立てた．

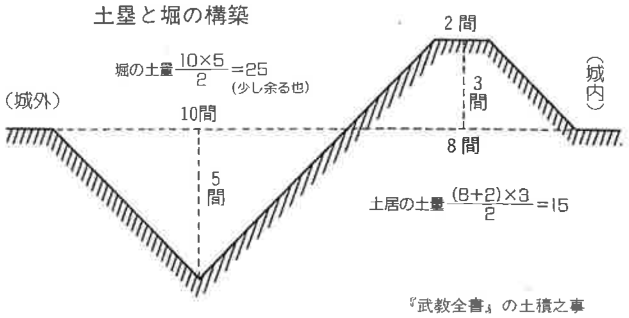
仮説 B: 小机城では，西郭の虎口外の郭のへこみ部分の土を用いて，西郭の東端といわゆる“受話器型の郭”との間に土橋を形成した．

測量と計算の結果，仮説 A は支持された（少なくとも否定する材料にはならなかった）が，仮説 B はどちらともはっきりしなかった．ただし，仮説 B は，土橋の両側の堀底の深さの差によって否定された．

2. 江戸時代の軍学

江戸期の軍学は，実践を離れた机上の学問となり，鵜呑みにできないものが多い．その中で山鹿素行 (1622〜1685) の『武教全書』[3] は，言い伝えに基づく具体的な数値を残している.「土積之事」の条にはこう書いてある．

土積之事: “ 伝に曰はく、堀口十間深さ五間のほりやうの土は、高さ三間、土居敷八間の土に少し余る也。処に由り時に由る口伝 ”



[3] から

堀の断面積が 25 平方間であり，土塁の断面積が 15 平方間であるので，このとおりだとすると，縮小率が $15/25 = 0.6$ になる（少し余るので，これより少し大きい）．つまり体積が 6 割強に縮むことを示している．これは，土塁を締め固めて形成した場合であろう.（ただし，この計算では土塁上部の褶（ひらみ＝馬踏）の幅を 2 間としている．この値は，堀の斜面の傾斜角 45 度を土塁に延長し，土塁の内側の傾斜角も同じとした場合の値 $8 - 3 \times 2 = 2$ である.）

この 6 割強という値を鵜呑みにすることはできないし，原文にあるとおり，土質や固め方によって縮小率は異なるであろう．しかし，土塁を築くときに “ 体積が縮む ”ことを具体的に示した資料として意味がある.

逆に，締め固めた土塁を崩すと，その体積が増えることを考慮しなければならない．とくに土塁を崩した土を堀内に埋めて農耕地にしているような場合には注意が必要であろう.

3. 数値積分による実測値からの体積計算

3.1. 数値積分.

関数が未知であっていくつかの関数値（実測値）が得られている場合，定積分の値は数値積分によって近似値として求めるしかない．体積を求める場合，通常は，横方向と縦方向の 2 回の積分を行なう（数学的には 2 重積分を行なうことになる）.

船の排水量計算を例にとって説明する．まず，船首から船尾までの（等間隔の）断面図を何枚か用意する.

1: 断面図の形状データから断面積を求めるのに数値積分を行ない,
2: いくつかの断面積から体積を求めるのに再び数値積分を行なう.

土塁と堀の体積も，実測値から同様にして近似的に計算できる．つまり，断面の測定値から断面積を求め，いくつかの断面積から体積を求めることができる.

3.2. 数値積分の公式.

代表的な数値積分公式として，ニュートン・コーツ (Newton-Cotes) 型の公式がある [4]. これらは，間隔を h とする等間隔の $m+1$ 個の点

$$x_i\,, \quad x_{i+1} = x_i + h\,, \quad x_{i+2} = x_i + 2h\,, \quad \cdots\,, \quad x_{i+m} = x_i + mh$$

における積分すべき関数 $y(x)$ の値

$$y_j = y(x_j) \qquad (j = i,\ i+1,\ \cdots,\ i+m)$$

が与えられた場合に適用する公式である．

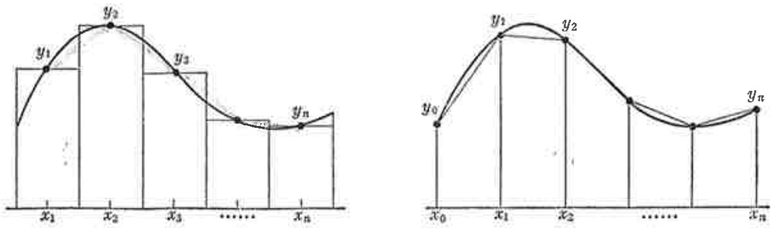


図 8.1 中点法（左）と台形法（右） [4] から

これら $m+1$ 個の点を通る m 次多項式を作り，その関数を x_i から x_{i+m} まで数学的に積分する．よく知られている公式として，次の二つがある．

台形公式 （$m=1$; 直線による近似）

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x)\,dx \fallingdotseq \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1}) \tag{3.1}$$

シンプソン公式 （$m=2$; 放物線による近似）

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} y(x)\,dx \fallingdotseq \frac{2h}{6}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) \tag{3.2}$$

台形公式 (3.1) は，両端のデータを平均して幅を掛けただけである．シンプソン公式 (3.2) は，3 点のデータのうち中央のデータの重みを両端の 4 倍にした重み付き平均値に幅を掛けた値である．シンプソン公式は，単純であって精度が高いので，よく用いられる．

さらに高次の公式も知られているが，次数を高くするとデータの誤差が拡大されるなどの悪影響が現れる [4]．むしろ，積分区間をいくつかの小区間に分けて，小区間ごとに低次 ($m=1, 2$) の公式を適用するほうが安全である．

3.3. 測量学における体積計算の手法.

測量学の教科書（たとえば [1]）における手法には、次の 3 種類がある。これらは、上記の台形公式などにほかならない。

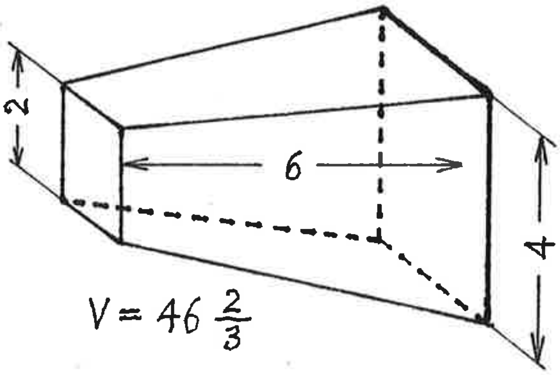
3.3.1. 断面法. 断面積から体積を求める.

平均断面法: 体積 ＝ 両端の断面積の平均値 × 長さ
中央断面法: 体積 ＝ 中央の断面積 × 長さ

平均断面法は，上記の台形公式にほかならない．中央断面法は,（上では触れなかった）中点公式にほかならない．

注意: 平均断面法では，両端の断面が同じ形状（たとえば正方形）であって，その間が平面で結ばれている四角錐台の場合でも，正確な体積は求まらない．
例： 両端がそれぞれ一辺 2m および 4m の正方形で，長さが 6m の場合，平均断面法による体積は $(2^2+4^2)/2\times 6 = (4+16)/2\times 6 = 60[\mathrm{m}^3]$ になるが，実際の四角錐台の体積は 46.667m^3 である．稜線が直線であっても誤差が生じるのは，断

面積が高さ方向の位置に関する1次関数ではなく2次関数になるからである．したがって，やはり1次関数で近似する中央断面法でも正確な体積は求まらない．



3.3.2. **点高法.** ある基準水平面からの垂直な三角柱または四角柱の体積を求める．

三角柱の場合: 体積 ＝ 水平断面積 × 三点の平均高さ

四角柱の場合: 体積 ＝ 水平断面積 × 四点の平均高さ

水平断面の形状が複雑な場合は，それを複数の三角形または四角形に分割する．

3.3.3. **等高線法.** 断面の形状から断面積を求める．

等高線が与えられたときに，その等高線によって作られる水平断面の面積を求め，それを積み上げる．(結局，高さ方向の積分には平均断面法を使うことになる．) 等高線に沿った水平断面の面積を求めるには，プラニメータという道具を用いる．最近は，ディジタルプラニメータもある．

3.4. **数値積分公式の連続した適用.**

台形公式とシンプソン公式を，それぞれ連続した数点のデータに適用した場合に，積分値がどうなるかを示す．ここでは記号が繁雑になるのを避けるために，次の7点 ($x_i = x_0 + ih$) のデータが得られている場合にどうなるかを例示する．

$$(x_0, y_0),\quad (x_1, y_1),\quad (x_2, y_2),\quad (x_3, y_3),\quad (x_4, y_4),\quad (x_5, y_5),\quad (x_6, y_6)$$

台形公式の場合　式 (3.1) を6回適用することによって，次のとおりになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \cdots + \frac{h}{2}(y_5 + y_6) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 2y_5 + y_6) \\
&= h\left(\frac{y_0 + y_6}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5\right) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

結果として，両端のデータの平均値と，それ以外の中間のデータの総和に区間幅を掛けた値になる．

シンプソン公式の場合　式 (3.2) を3回適用することによって，次のとおりになる．

$$\begin{aligned}
&\frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{2h}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \frac{2h}{6}(y_4 + 4y_5 + y_6) \\
&= \frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6)
\end{aligned}$$

$$= h\frac{2}{3}\left\{\frac{y_0+y_6}{2}+(y_2+y_4)+2(y_1+y_3+y_5)\right\} \tag{3.4}$$

結果として，両端のデータの平均値と，偶数番目のデータの和と，奇数番目のデータの和の 2 倍との合計の $\frac{2}{3}$ 倍に区間幅を掛けた値になる．

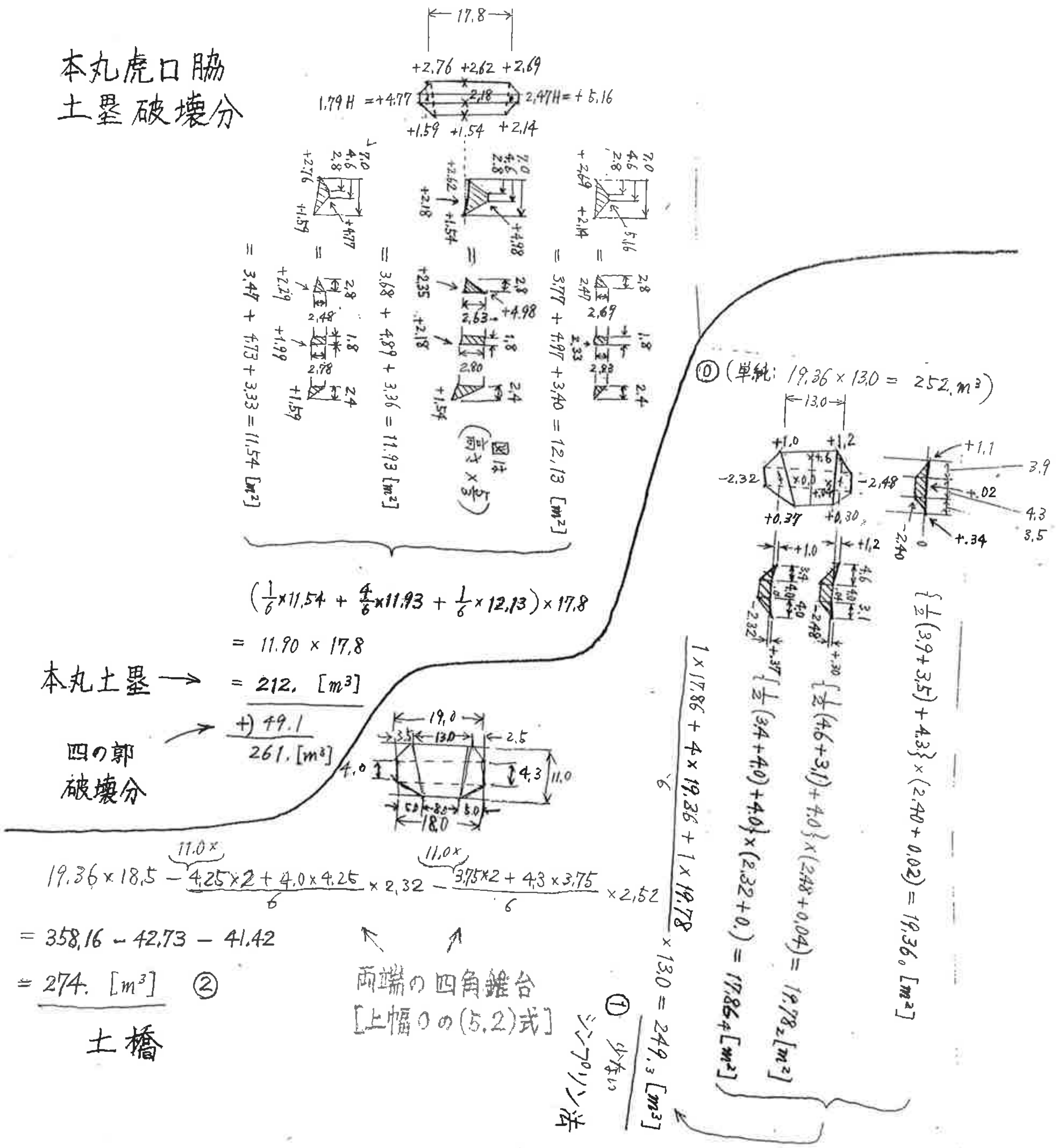
4. 計算例

4.1. 小幡城.

破壊されたと考えられる土塁分： $212\mathrm{m}^3$
形成されたと考えられる土橋分： $274\mathrm{m}^3$
両者の比： 1.29

この結果から，土塁を破壊して土橋を形成したと考えられる．

破壊されたと考えられる土塁の体積は，もう少し大きかったかもしれない．上の値は，現在も左右に残っている土塁の高さから計算した推定値であり，土塁を崩した時点で残っていた土塁は，もう少し高かった可能性がある．



四の郭
土塁破壊部

$$V = \frac{1\times0 + 4\times1.78 + 1\times4.04}{6} \times 7.0 = 13.0\ [m^3]$$

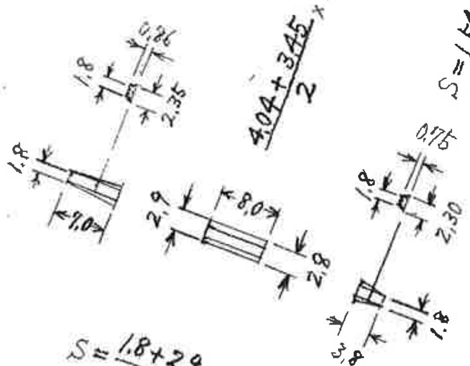
$$V = \frac{1\times3.45 + 4\times1.54 + 1\times0}{6} \times 3.8 = 6.1\ [m^3]$$

$$\underbrace{13.0 + 30.0 + 6.1}_{49.1\ m^3}$$

$S = 1.78_4\ [m^2]$

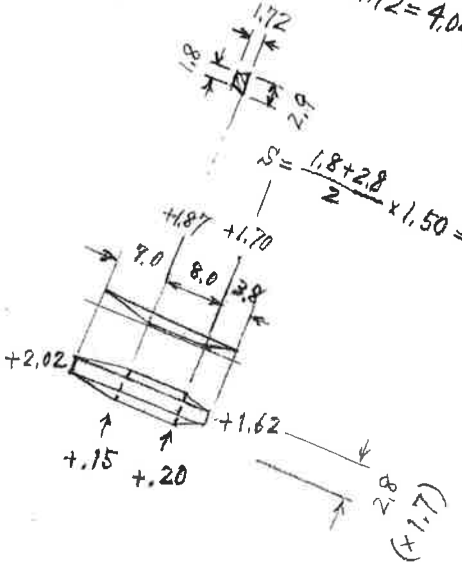
$$\frac{4.04 + 3.45}{2} \times 8.0 = 30.0\ [m^3]$$

$S = 1.54_3\ [m^2]$



$$S = \frac{1.8 + 2.9}{2} \times 1.72 = 4.04_2\ [m^2]$$

$$S = \frac{1.8 + 2.8}{2} \times 1.50 = 3.45\ [m^2]$$



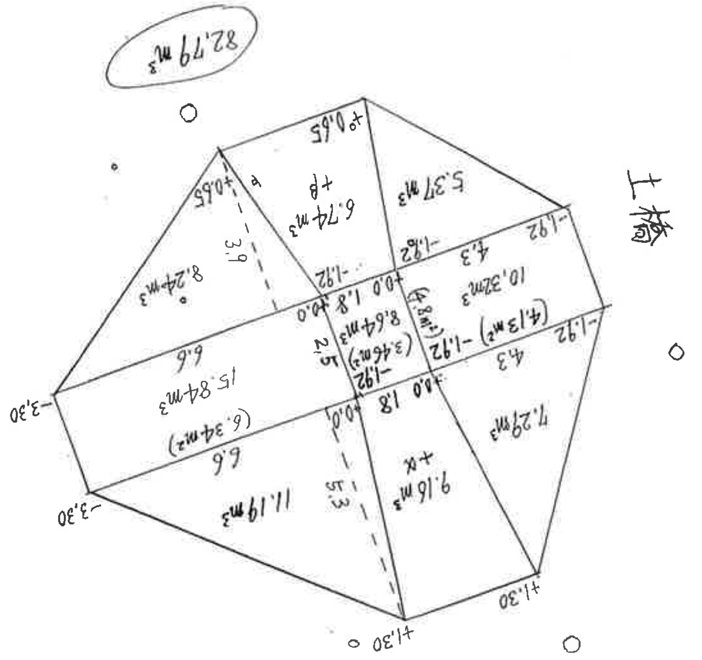
4.2. **小机城.**

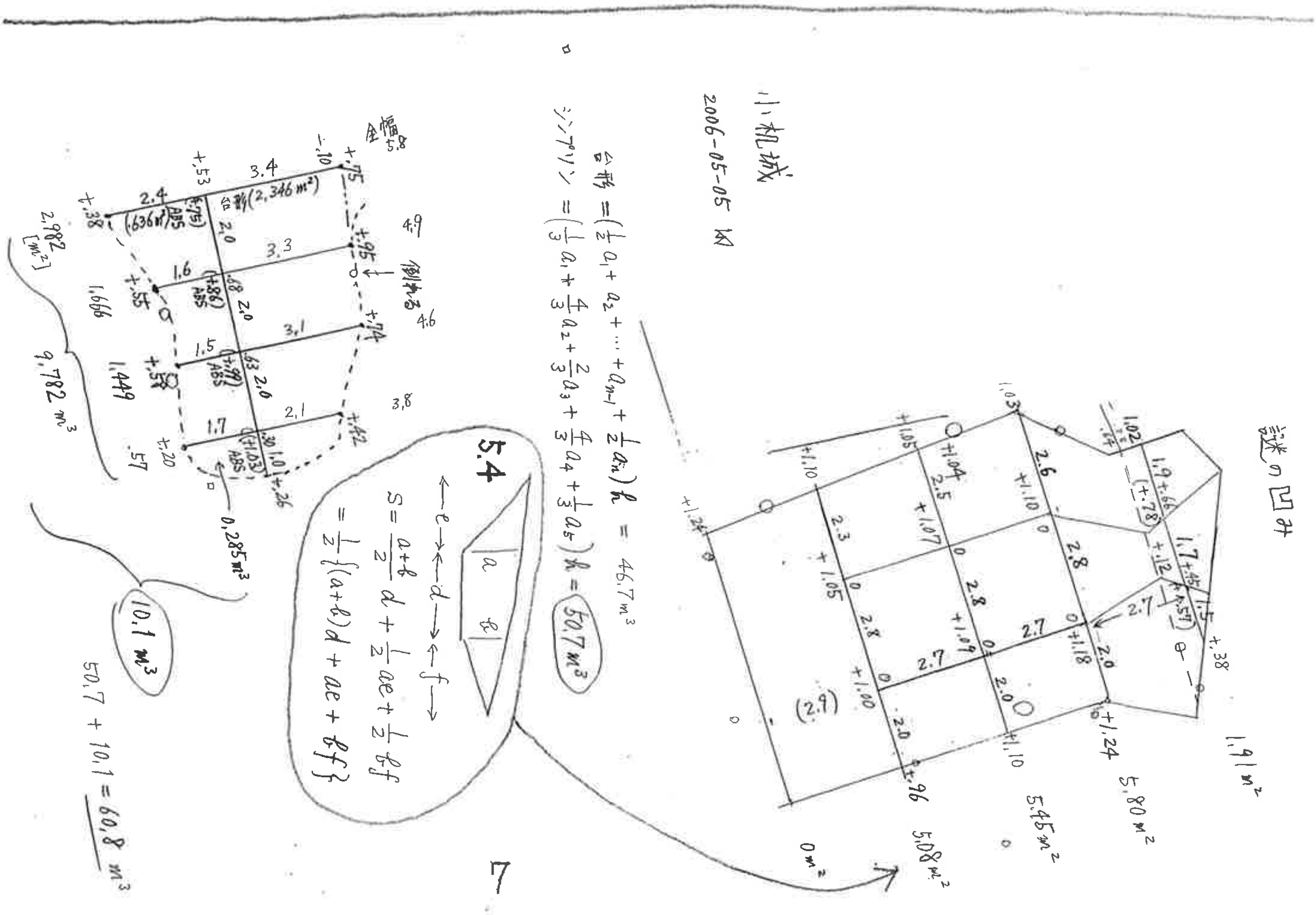
削られたと考えられるへこみ部分（図３の A）: 60.8m^3

形成されたと考えられる土橋分（図３の B）:　82.8m^3

両者の比: 1.36

この結果からでは，A を削って B を形成したかどうかは判らない.





しかし，図4にある土橋に垂直な方向の堀底（断面）を見ると，土橋の両脇（南北）の堀底の深さに 1m 以上の高低差があることが分かる．これは，もともと両脇の堀が一体ではなかったことを意味する．おそらく，土橋はもともとあったのであろう．

参考文献

References

[1] 大木正喜『測量学』森北出版, 1998.

[2] 小田部和司『測量学（第2版）』技報堂, 1999.

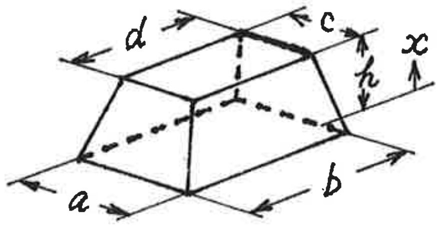
[3] 山鹿素行『武教全書』出版者不明,（山鹿素行: 1622〜1685). in 松岡利郎（監修・文）「城を守る」『戦略戦術兵器事典 6 日本城郭編』グラフィック戦史シリーズ, 学研, 1997, p. 52.

[4] 戸川隼人『計算機のための数値計算』サイエンスライブラリ コンピュータテキスト 5, サイエンス社, 1976, p. 56.

5. 付録　公式集

5.1. **四角錐台の体積**. 上下の底面が長方形で，対応する各辺（縦 a と c; 横 b と d）が並行であり，高さ h の四角錐台の体積：

$$\frac{h}{6}(2ab + ad + bc + 2cd) \tag{5.1}$$



証明：　底面からの高さを x とすると，体積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^h \left(\frac{x}{h}c + \frac{h-x}{h}a\right) \times \left(\frac{x}{h}d + \frac{h-x}{h}b\right) dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h \{(c-a)x + ah\} \times \{(d-b)x + bh\}\, dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_0^h (a-c)(b-d)x^2 + h(ad+bc-2ab)x + h^2ab\, dx \\
&= \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{3}(a-c)(b-d)x^3 + h\left(\frac{ad+bc}{2} - ab\right)x^2 + h^2abx\right]_0^h \\
&= \frac{h}{3}(a-c)(b-d) + h\left(\frac{ad+bc}{2} - ab\right) + hab \\
&= \frac{h}{6}\{2(a-c)(b-d) + 3(ad+bc)\} \\
&= \frac{h}{6}(2ab + ad + bc + 2cd)
\end{aligned}
$$

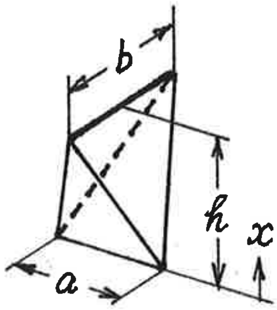
とくに $d=0$ の場合，

$$\frac{h}{6}(2a+c)b \tag{5.2}$$

になる．その場合であってさらに $c=0$ のとき，$\dfrac{h}{3}ab$（四角錐の体積）になる．

5.2. **四面体の体積.** 上下の辺（長さ a と b がねじれの位置にあり，高さ h の四面体の体積：

$$\frac{1}{6}\,abh \tag{5.3}$$



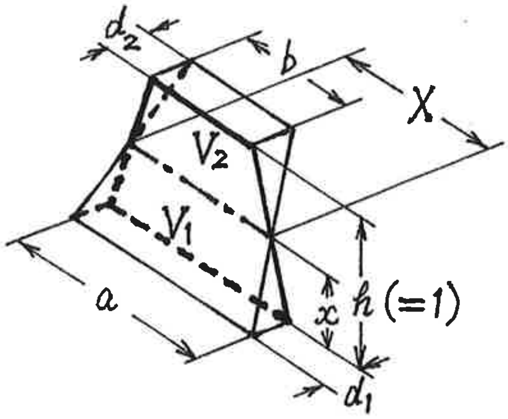
証明：　底面からの高さを x とすると，体積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^h \frac{x}{h}\,a \times \frac{h-x}{h}\,b\,dx \\
&= \frac{ab}{h^2}\int_0^h x(h-x)\,dx \\
&= \frac{ab}{h^2}\left[\frac{hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^h \\
&= \frac{1}{6}\,abh
\end{aligned}
$$

5.3. **台形の等積中心線.**

事後の計算を簡略にするために，台形内にあって底辺と平行な“等積中心線”の高さ（底辺からの距離）を求める．ここで定める“等積中心線”とは，台形内の底辺と平行な直線であって，それを中心として，台形面を面と垂直な方向に移動したときにできる上下の立体の体積が等しくなる直線である．台形の下底の長さを a，上底の長さを b，高さを h とすると，等積中心線の高さは：

$$\frac{a+2b}{3(a+b)}h$$



証明：　計算を簡単にするために台形の高さを 1 とし，中心線の高さを x，その長さを X とする．下底のずれ量を d_1，上底のずれ量を d_2，下の立体の体積を V_1，上の立体の体積を V_2 とすると，$X = a + (b-a)x$ だから，公式 (5.2) によって，V_1, V_2 はそれぞれこうなる．

$$V_1 = \frac{x}{6}(2a + X)d_1 = \frac{x}{6}\{3a + (b-a)x\}d_1$$

$$V_2 = \frac{1-x}{6}(2b + X)d_2 = \frac{1-x}{6}\{a + 2b + (b-a)x\}d_2$$

$V_1 = V_2$ となるためには，

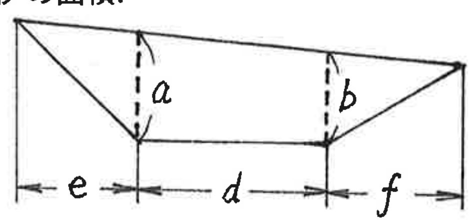
$$\{3a + (b-a)x\}d_1 x = \{a + 2b + (b-a)x\}d_2(1-x)$$

ここで，$d_2 = d_1(1-x)/x$ だから，

$$\begin{aligned}
\{3a + (b-a)x\}x^2 &= \{a + 2b + (b-a)x\}(1-x)^2 \\
\{3a + (b-a)x\}x^2 &= \{a + 2b + (b-a)x\}(1 - 2x + x^2) \\
3ax^2 &= \{a + 2b + (b-a)x\}(1-2x) + (a+2b)x^2 \\
(2a - 2b)x^2 &= a + 2b + (b-a)x - 2(a+2b)x - 2(b-a)x^2 \\
0 &= a + 2b - 3(a+b)x \\
x &= \frac{a+2b}{3(a+b)}
\end{aligned}$$

とくに $b = 0$ のとき，$x = \frac{1}{3}$ になる（これは三角形の重心の位置である）．

5.4. 三角形＋台形＋三角形 の面積.



上図は，よく現れる断面の形状である．便宜のために，その面積を示しておく．

$$\begin{aligned}
S &= \frac{a+b}{2}d + \frac{1}{2}ae + \frac{1}{2}bf \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b)d + ae + bf\}
\end{aligned}$$

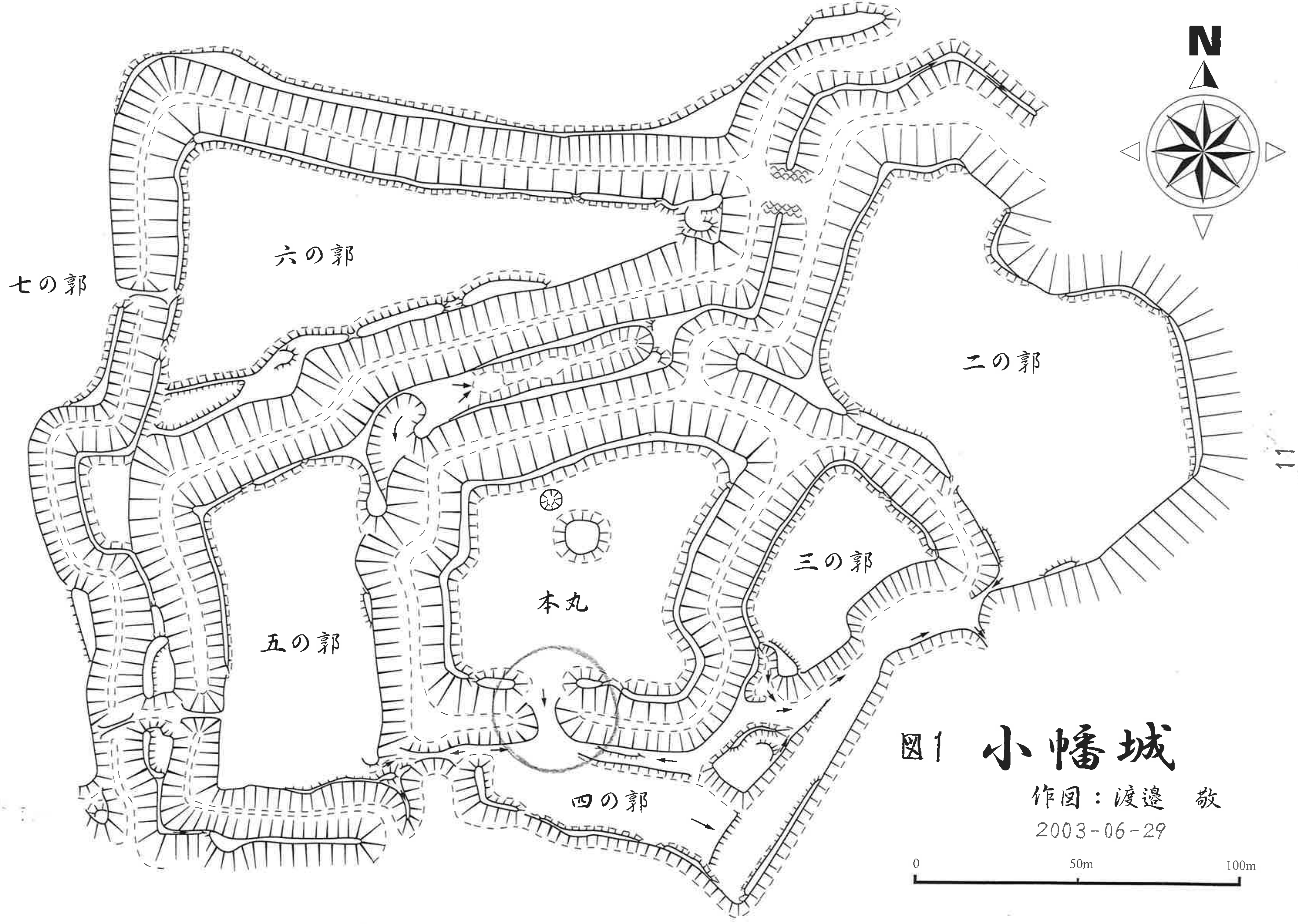


図1 小幡城

作図：渡邉　敬
2003-06-29

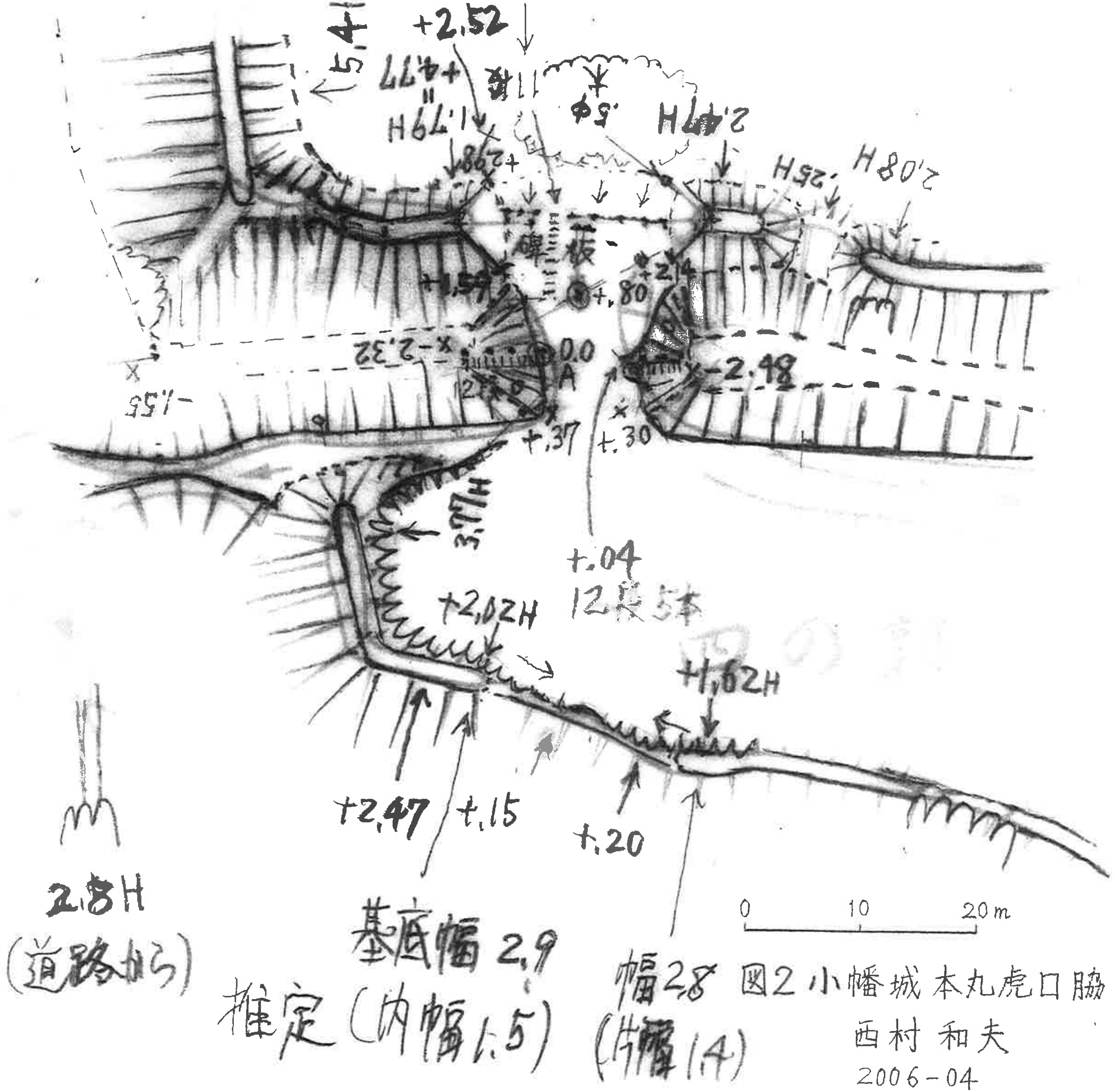


図2 小幡城本丸虎口脇
西村 和夫
2006-04

浅田琢夫氏 2006-05-25

三ヶ寺耕地

新羽耕地
川向 —
小机 —

年貢米→城坂

まれどせ
馬洗戸瀬

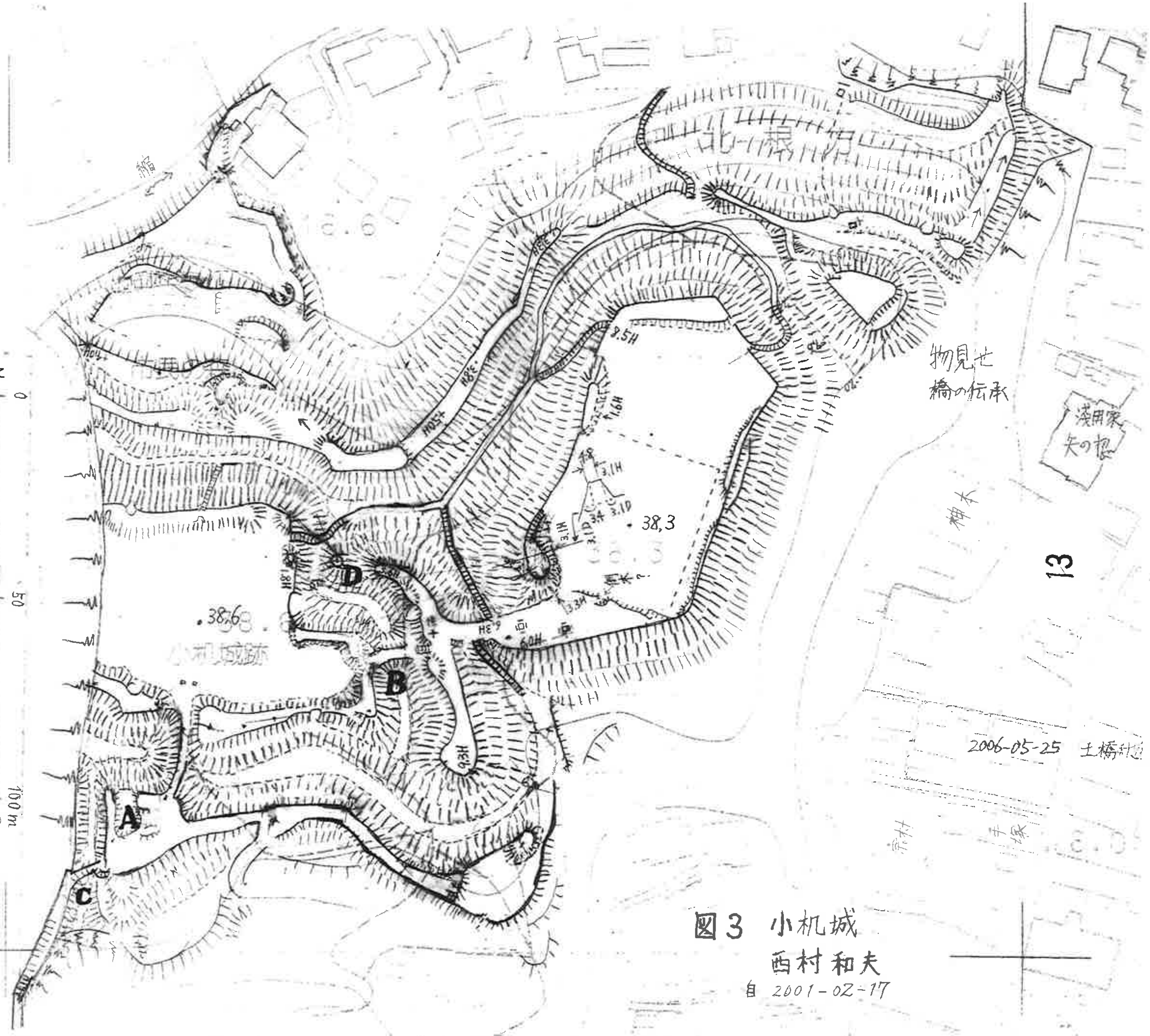
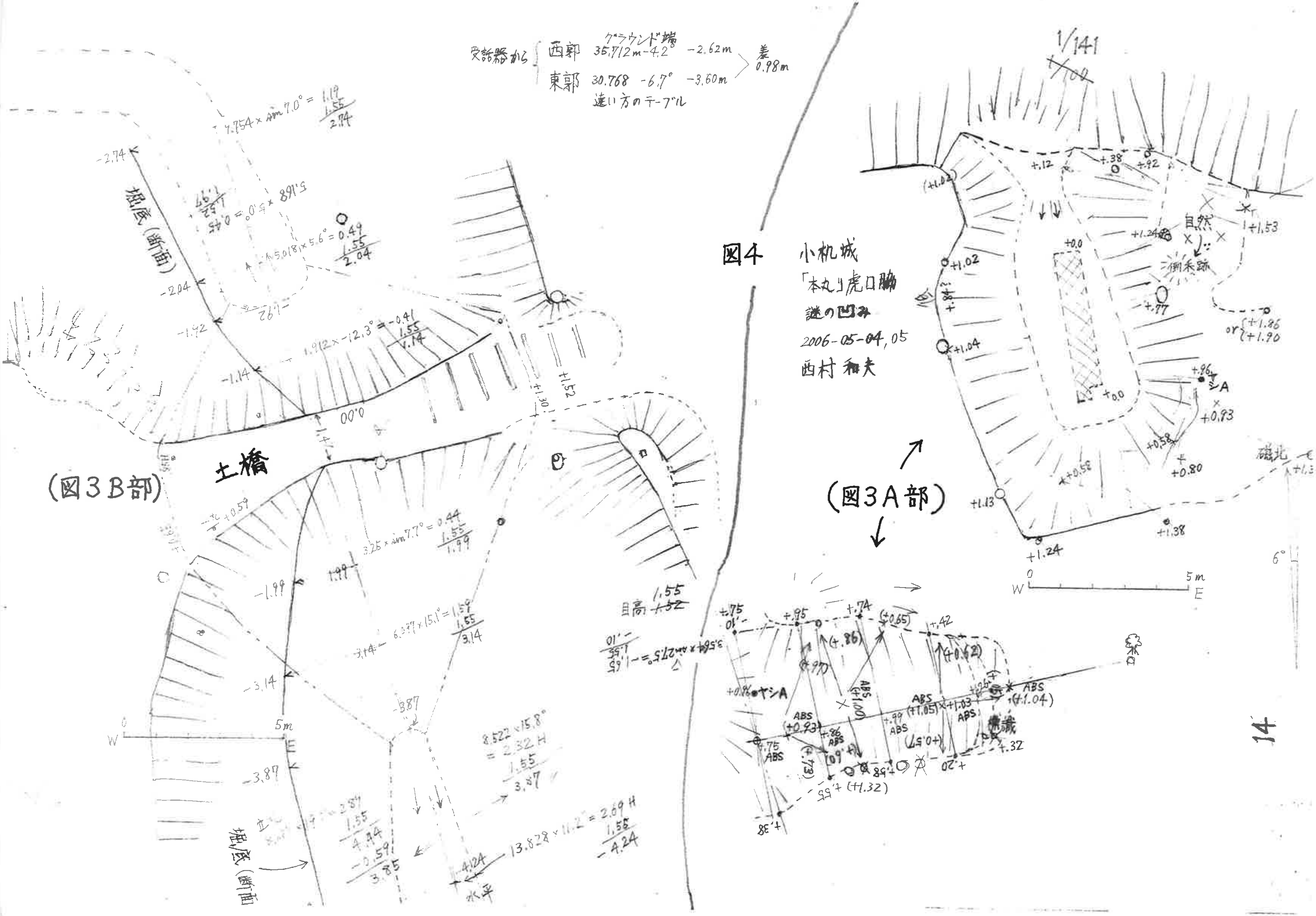


図3 小机城
西村和夫
自 2001-02-17
至 2001-04-29
2001-10-07
2003-04-06



受話器から 西郭 グラウンド端 35.712m -4.2° -2.62m 東郭 30.768 -6.7° -3.60m 差 0.98m
違い方のテーブル
図4
小机城
「本丸」虎口脇
謎の凹み
2006-05-04, 05
西村 和夫
(図3B部)
土橋
(図3A部)
堀底(断面)
目高 1.55
自然
側系跡
磁北
水平
1/141